equazione che si può di nuovo sostituire ad una delle precedenti, per es. alla prima. Finalmente eliminando k fra le altre due si ha

q2 — (b — i) (apz — ij\p' = a bp q q'.

È evidente che se esiste una traiettoria , la sua equazione finita non può esser altro che la (i), la quale non contiene alcuna delle quantità k, co, p'9 q' ; ma d'altra parte dev'essere soddisfatta anche la precedente equazione, che contiene q2 e qq'y dunque la relazione che dovrà risultare identica affinchè esista una traiettoria sarà quella che si otterrà sostituendo in quest'ultima equazione i valori di q2 e di q q' cavati dalla (i) e dalla sua derivata. Ora, facendo tale sostituzione si trova per risultato una identità : dunque la (i) o senz'altro l'equazione della traiettoria e fra i parametri a, b, o della superficie data non occorre ammettere alcuna relazione necessaria. È poi evidente che supponendo p = pf = o, ovvero q = qr — o, si otterrebbero altre due traiettorie analoghe alla (i), situate ne' due piani principali y^ e ^x.

Ponendo l'equazione della superficie sotto l'ordinaria forma

*!. + £ L. *' - :
A2 ^~ "B* r C1 ~ ' facilmente si

trova che le equazioni delle tre coniche analoghe alla (i) sono :

q* . r2 / 1/F+7J^> — q2 -
T?\
nel pano n, p-L^ + __, = i , (cos
o,, = _____J
; m + A*__ »» — I > j cos w2 — J/7-,i — F" 'V 2
1/CT4-^— 2&—r2-

, 2!=ci F—C '-'

ossia che le tre curve cercate son quelle che si sogliono denominare focali.

Dal fin qui detto si ricavano le seguenti proprietà :

Se F è una qualunque delle, Ire coniche focali d'una superficie di secondar dine S:

i° Tutte le superficie coniche (reali od immaginarie) aventi il vertice in un punto di F e circoscritte ad S sono coni retti.

2° Gli assi di questi coni sono tangenti alla focale F *).

3° Le linee tracciate nella superficie S in modo che le loro tangenti incontrino costantemente F sono geodetiche di quella superficie.

*) HESSE, VorlesungMi über analylische Geometrie des Raumes, Lipsia, 1861,

pp. 298-301.